Equations de Chapman-Kolmogorov et flots stationnaires pour des processus markoviens

Jean-Yves Le Boudec, Jean Pellaumail

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 260

ÉQUATIONS DE CHAPMAN-KOLMOGOROV ET FLOTS STATIONNAIRES POUR DES PROCESSUS MARKOVIENS

Jean-Yves LE BOUDEC
Jean PELLAUMAIL

Décembre 1983

IRISA INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

EQUATIONS DE CHAPMAN-KOLMOGOROV ET FLOTS STATIONNAIRES POUR DES PROCESSUS MARKOVIENS

par

J.Y. LE BOUDEC et J. PELLAUMAIL

Publication Interne n° 213
Novembre 1983
18 pages

Résumé

On étudie les lois des délais liés à certaines transitions pour des processus markoviens généraux. On généralise ainsi divers résultats classiques. Notamment, on étudie le cas des réseaux "réversibles".

Abstract

There are several classical theorems about stationary distributions of flows in queueing networks. We give some generalizations of such results via Chapman-Kolmogorov equations. The case of "reversible" Markov processes is specially studied.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

P L A N

A. CADRE GENERAL

On considère un processus markovien homogène qui évolue en temps continu et dont l'espace des états E est fini ou dénombrable.

Pour tout couple (i,j) d'éléments de E tel que $i \neq j$, on notera a(i,j) le taux de transition de l'état i à l'état j ; autrement dit :

A.1. $$a(i,j) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \text{ Proba } [j \text{ à } t+h \mid i \text{ à } t]$$

La famille $\{a(i,j)\}_{(i,j) \in (E \times E)}$ caractérise le générateur infinitésimal du processus considéré.

Pour certains états j, on s'intéressera aussi à des "transitions" sans changement d'état (cas d'un "feedback" à une station) ; on posera alors :

A.2. $$a(j,j) := \lim_{h \, 0} \frac{1}{h} \text{ Proba que } j \text{ à } t+h \text{ et "transition" entre } t \text{ et } t+h$$

sachant que état j à t

Pour tout élément j de E, on pose :

A.3. $$d(j) := \sum_{i \in E,\ i \neq j} a(j,i)$$

On suppose que le processus considéré est ergodique et, pout tout état j, on notera q(j) la probabilité stationnaire, pour ce processus, d'être dans l'état j. La famille $\{q(j)\}_{j \in E}$ est donc l'unique famille de nombres positifs satisfaisant aux deux conditions suivantes :

A.4. $$\sum_{j \in E} q(j) = 1$$

A.5. pour tout élément j de E,

$$q(j)\, d(j) = \sum_{i \in E,\ i \neq j} q(i)\, a(i,j)$$

De plus, on considère une partie F de (E x E) et on pose :

A.6. $b(i,j) := a(i,j) \ 1_F (i,j)$

On dira qu'une transition de l'état i à l'état j est une F^*-transition si (i,j) appartient à F (y compris le cas i=j si (j,j) appartient à F).

Dans ce qui suit, on s'intéresse essentiellement aux lois des délais avant une F^*-transition ou entre deux F^*-transitions.

Compte-tenu de la convention A.6., s'il y a feedback dans plusieurs stations, pour un même état j, on les prend tous en compte ou on n'en prend aucun. Ce choix a été fait pour alléger la présentation. Ce n'est d'ailleurs pas une restriction dans l'étude qui suit : si un feedback ne doit pas être pris en compte, il suffit de l'éliminer dès la modélisation en modifiant convenablement les taux de service.

Pour tout élément (t,i,j) de $(\mathbb{R}^* \times E \times E)$, on pose :

A.7. $x_{i,j}(t)$:= probabilité que le processus soit dans l'état j à t et qu'il n'y ait pas eu de F^*-transition entre 0 et t sachant que le processus était dans l'état i à l'instant 0.

On pose aussi :

A.8. $$u(t) := \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} q_i \, x_{i,j}(t) .$$

La fonction $[1-u(t)]$ est exactement la fonction de répartition du délai avant la première F^*-transition à partir d'un instant choisi "au hasard" en régime stationnaire.

Soit $f(t) := -u'(t)$ la densité de probabilité de ce délai avant la première F^*-transition (en régime stationnaire). Soit g(t) la densité de probabilité du délai entre deux F^*-transitions (en régime stationnaire). On sait (étude classique : voir annexe 1) que :

A.9. $$f(t) = \int_t^{+\infty} g(u)du \Big/ \int_0^{+\infty} u \, g(u)du \ .$$

Pour étudier g il suffit donc d'étudier f (et vice-versa). Or les fonctions $x_{i,j}(t)$ satisfont aux équations de Chapman-Kolmogorov ; on a :

$$x_{i,j}(t+h) = x_{i,j}(t)\,\left[1 - (d(j) + b(j,j))\,h\right] + \sum_{k\in E,k\neq j} x_{i,k}(t)\,(a-b)(k,j)h + o(h)$$

où $o(h)$ désigne un infiniment petit par rapport à h.

On en déduit

A.10 $$x'_{i,j} = -\left[d(j) + b(j,j)\right] x_{i,j} + \sum_{k\in E,k\neq j} x_{i,k}(a-b)\,(k,j) .$$

B. SUR UN SYSTEME DIFFERENTIEL

Théorème 1

Soit E un ensemble fini ou dénombrable et M un réel positif. Soit $((\rho_{i,j}))$, $((\xi_{i,j}))$ et $((\eta_{i,j}))$ trois familles de réels indexées par $(E \times E)$ et telles que :

B.1. pour tout élément i de E :

$$\sum_{j\in E} |\xi_{i,j}| + |\xi_{j,i}| + |\eta_{i,j}| + |\eta_{j,i}| \leqslant M$$

B.2. $$\sum_{(i,j)\in E\times E} |\rho_{i,j}| < +\infty$$

B.3. pour tout élément (i,j) de $(E \times E)$, on a :

$$\sum_{k\in E} \rho_{i,k}\,\xi_{k,j} = \sum_{k\in E} \eta_{i,k}\,\rho_{k,j}$$

On considère le système différentiel (linéaire, à coefficients constants et sans second membre) suivant :

B.4. $u'_{i,j} = \sum_{k\in E} u_{i,k}\, \xi_{k,j}$

B.5. $v'_{i,j} = \sum_{k\in E} \eta_{i,k}\, v_{k,j}$

B.6. $u_{i,j}(0) = v_{i,j}(0) = \rho_{i,j}$

La solution de ce système (B.4., B.5., B.6.) existe et est unique (étude classique - cf. par exemple, [Yos]) et, pour cette solution, on a, quels que soient t, i et j :

B.7. $u_{i,j}(t) = v_{i,j}(t)$

Preuve

Les fonctions $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont analytiques (résultat classique). Pour prouver le théorème, il suffit donc de prouver que, quel que soit l'entier $k > 0$, on a :

$$u^{(k)}_{i,j}(0) = v^{(k)}_{i,j}(0)$$

où $u^{(k)}_{i,j}$ désigne la dérivée d'ordre k de $u_{i,j}$ (et de même pour $v^{(k)}_{i,j}$) .

Pour faciliter la compréhension du lecteur, nous allons prouver cette propriété pour k = 3 ; il est bien évident que le même argument vaut pour k quelconque. On a (compte-tenu de B.4.) :

$$u^{(3)}_{i,j} = \sum_k u^{(2)}_{i,k}\, \xi_{k,j} = \sum_{k,m} u'_{i,m}\, \xi_{m,k}\, \xi_{k,j}$$

$$= \sum_{k,m,n} u_{i,n}\, \xi_{n,m}\, \xi_{m,k}\, \xi_{k,j}$$

En faisant t = 0 et en utilisant B.6., on a :

$$u^{(3)}_{i,j}(0) = \sum_{k,m,n} \rho_{i,n}\, \xi_{n,m}\, \xi_{m,k}\, \xi_{k,j}$$

en utilisant trois fois B.3., il vient :

$$u^{(3)}_{i,j}(0) = \sum_{k,m,n} \eta_{i,n}\, \rho_{n,m}\, \xi_{m,k}\, \xi_{k,j}$$

$$= \sum_{k,m,n} \eta_{i,n}\, \eta_{n,m}\, \rho_{m,k}\, \xi_{k,j}$$

$$= \sum_{k,m,n} \eta_{i,n}\, \eta_{n,m}\, \eta_{m,k}\, \rho_{k,j}$$

En utilisant B.5. et en raisonnant comme ci-dessus, on a :

$$u^{(3)}_{i,j}(0) = v^{(3)}_{i,j}(0) .$$

C. PROCESSUS REVERSIBLES

Théorème 2

On se place dans le cadre général donné au paragraphe A. On suppose de plus, que quel que soit (i,j) élément de $(E \times E)$, on a :

C.1. $\quad q(i)\, a(i,j) = q(j)\, a(j,i)$

Soit F une partie de $(E \times E)$ et b comme défini en A.6. Soit G la partie de $(E \times E)$ définie par :

C.2. $\quad G := \{(i,j) : (j,i) \in F\}$

On pose

C.3. $\quad c(i,j) := a(i,j)\, 1_G\, (i,j)$

On a alors, pour tout élément (i,j) de $E \times E$:

C.4. $\quad q(i)\, c(i,j) = q(j)\, b(j,i)$

On définit $x_{i,j}(t)$ comme en A.7. De même, on pose :

C.5. $w_{i,j}(t)$:= probabilité que le processus soit dans l'état j à t et qu'il n'y ait pas eu de G^*-transition entre 0 et t sachant que l'état était i à l'instant 0.

On a alors les équations de Chapman-Kolmogorov (analoques à A.10) :

C.6. $w'_{i,j} = -\left[d(j) + c(j,j)\right] w_{i,j} + \sum_{k \in E, k \neq j} w_{i,k}\,(a-c)\,(k,j)$

On pose alors :

C.7. $\xi_{k,j} := -\left[d(j) + b(j,j)\right] \delta_{k,j} + (a-b)\,(k,j)\,(1-\delta_{k,j})$

avec $\delta_{k,j} := 1$ si $k=j$ et $\delta_{k,j} = 0$ si $k \neq j$

C.8. $\eta_{j,k} := -\left[d(j) + c(j,j)\right] \delta_{j,k} + (a-c)\,(k,j)\,(1-\delta_{k,j})$

C.9. $\rho_{i,j} := q_i\,\delta_{i,j}$

C.10. $u_{i,j} := q_i\,x_{i,j}$

C.11. $v_{i,j} := q_j\,w_{j,i}$

On suppose que la condition B.1. est satisfaite. On vérifie alors que toutes les hypothèses du théorème du paragraphe B sont satisfaites. Plus précisément, compte-tenu des définitions ci-dessus, C.1. et C.4. impliquent B.3., A.10 implique B.4. et C.6. implique B.5. Enfin $u_{ij}(0) = q_i\,\delta_{i,j}$ (cf. A.8.) et $v_{i,j}(0) = q_j\,\delta_{j,i}$ (cf. C.5.), donc $u_{i,j}(0) = v_{i,j}(0) = \rho_{i,j}$.

On a donc, quel que soit (t,i,j) élément de $\mathbb{R}^+ \times E \times E$:

$$u_{i,j}(t) = v_{i,j}(t).$$

Autrement dit :

C.12. $q_i\,x_{i,j}(t) = q_j\,w_{j,i}(t)$.

On en déduit, a fortiori,

C.13. $\sum_{i,j} q_i\, x_{i,j}(t) = \sum_{i,j} q_j\, w_{j,i}(t)$

c'est-à-dire que le délai avant la première F^*-transition (à partir d'un instant choisi au hasard, en régime stationnaire) suit la même loi que le délai avant la première G^*-transition.

On en déduit (cf. A.9) que le délai entre deux F^*-transitions est le même que le délai entre deux G^*-transitions. On retrouve donc ainci le résultat de [LPS] dans le cas des réseaux réversibles. Toutefois, il est bien évident que la relation C.12. est infiniment plus précise que la relation C.13. et donne donc beaucoup plus d'informations sur les relations entre les lois des F^*-transitions et les lois des G^*-transitions.

Remarque

Considérons le cas très particulier où on prend $F := G := \emptyset$; autrement dit, $b = c = 0$. Tout ce qui précède reste valable et la relation C.12 devient :

C.14. q_i { Probabilité que le processus soit dans l'état j à t sachant qu'il était dans l'état i à 0 } $= q_j$ { Probabilité que le processus soit dans l'état i à t sachant qu'il était dans l'état j à 0 }

(cf. l'annexe 2 pour un exemple élémentaire)

C'est la propriété de réversibilité (cf. [Kel]).

D. EXEMPLES DE PROCESSUS REVERSIBLES

Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler deux exemples de processus de Markov réversibles.

Exemple 1

Soit un réseau constitué de n stations entre lesquelles circulent des clients (tous de la même classe) ; l'une des stations peut contenir une infinité de clients (le taux de service est alors fixe). Pour les autres stations, le taux de service peut dépendre du nombre de clients dans la station. On appelle $r_{i,j}$ la probabilité (dite de "routage") en quittant la station i d'aller à la station j.

On suppose (ce qui est très restrictif) qu'il existe une famille $(e_i)_{i \in E}$ de réels positifs telle que $\sum_{i \in E} e_i = 1$ et quels que soient i et j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, on a :

D.1. $e_i \, r_{i,j} = e_j \, r_{j,i}$

On vérifie alors que, si le réseau est ergodique, la condition C.1. est satisfaite (cf. [Pit]) . De plus, si S est une station fixée et si F est l'ensemble des couples (i,j) tels que le passage de i à j correspond à une entrée dans la station S, alors G (cf. C.2.) est l'ensemble des couples (i,j) tels que le passage de i à j correspond à une sortie de la station S.
La propriété C.12. devient donc, dans ce cas, pour tout couple (i,j) d'états :

D.2. q_i.Probabilité que état j à t et pas d'entrée en S entre 0 et t sachant que état i à l'instant 0

= q_j.Probabilité que état i à t et pas de sortie de S entre 0 et t sachant que état j à l'instant 0.

Attention, si on veut tenir compte d'un feedback à la station S, celui-ci doit être pris en considération à l'entrée et à la sortie (cf. C.2.).

Bien entendu, ceci n'est qu'un exemple ; on pourrait tout aussi bien prendre pour F l'ensemble des couples (i,j) d'états correspondant à une entrée en S ou une sortie de S' - S et S' étant deux stations fixées, etc..

Exemple 2

On considère un réseau B.C.M.P (cf. [BCMP]) classique sans changement de classe. Soit K l'ensemble des classes et $r_{i,j,k}$ la probabilité - dite de routage - pour un client de classe k qui quitte la station i d'aller dans la station j. On suppose que le réseau est ergodique et qu'il existe une famille $(e_{i,k})_{i \in E, k \in K}$ de réels positifs telle que $\sum_{i,k} e_{i,k} = 1$ et quel que soit (i,j,k) élément de (E x E x K) :

D.3. $e_{i,k} \, r_{i,j,k} = e_{j,k} \, r_{j,i,k}$

On vérifie alors que la condition C.1. est satisfaite. (Cf. [Leb]). Ceci reste vrai si on introduit des blocages à diverses stations (cf. [Pit] et [Leb]).

Comme précédemment, on peut choisir l'ensemble F comme on veut. On peut, par exemple, prendre, pour F, tous les couples d'états correspondant à une entrée d'un client de classe k dans la station S_i (avec i et k fixés). G correspond alors aux départs d'un client de classe k de S_i.

On peut aussi prendre, pour F, toutes les entrées en S_i et donc, pour G, toutes les sorties, etc...

E. ENTREES ET SORTIES POISSONNIENNES

Nous reprenons le formalisme introduit au paragraphe A ; par contre, nous ne supposons plus que la condition (très restrictive) C.1. est satisfaite.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que le processus est en régime stationnaire et on l'observe à partir de l'instant t = 0. On a donc, notamment, quels que soient $t \geqslant 0$ et i élément de E :

E.1. $q(i) = \text{Proba}\,[\text{état } i \text{ à } t]$

De plus, on pose, quels que soient $t \geqslant 0$ et j élément de E :

E.2. $x(t,j)$:= probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant t et qu'il n'y ait pas eu de F^*-transition entre 0 et t.

Les fonctions $x(.,j)$ satisfont aux mêmes équations de Chapman-Kolmogorov que les fonctions $x_{i,j}(.)$ (pour i fixé) ; seules les conditions initiales changent. Plus précisément, on a :

E.3. $$x'(t,j) = -\left[d(j) + b(j,j)\right] x(t,j) + \sum_{k \in E,\ k \neq j} x(t,k)\ (a-b)(k,j)$$

E.4. $x(0,j) = q(j)$

E.5. $x(t,j) \leqslant q(j)$ pour $t \geqslant 0$

On pose aussi :

E.6. $y(t,j)$:= probabilité pour qu'il y ait eu (au moins) une F^*-transition entre 0 et t et que l'état ait été j juste <u>après</u> la première telle F^*-transition.

On a

$$y(t+h,j) = y(t,j) + \sum_{k \in E} x(t,k)\, b(k,j)h + o(h)$$

ce qui implique :

E.7. $$y'(t,j) = \sum_{k \in E} x(t,k)\, b(k,j)$$

Par ailleurs, on a évidemment :

E.8. $$y(0,j) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in E} (x'+y')\,(t,j) = 0 \quad \text{donc}$$

E.9. $$\sum_{j \in E} (x+y)\,(t,j) = 1.$$

En général, le système différentiel (E.3., E.7.) admet une et une seule solution pour des conditions initiales données (ici E.4. et E.8.) ; ceci est notamment le cas (cf. [Yos]) si on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que, quel que soit l'état j, on ait :

E.10. $$d(j) + \sum_{k \in E} a(k,j) \leq M$$

En général, cette solution n'a pas une forme explicite simple. Toutefois, on a la proposition suivante :

Théorème 3

En plus des hypothèses et conventions introduites aux paragraphes A et E, on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la condition - très restrictive - suivante est satisfaite pour tout état j :

E.11. $$\sum_{k \in E} q(k)\, b(k,j) = \lambda q(j)$$

ALors on a :

E.12. $$x(t,j) = q(j)\, e^{-\lambda t}$$

E.13. $$y(t,j) = [1-e^{-\lambda t}]\, q(j)\ .$$

Ceci implique que le délai avant la première F^*-transition suit la loi exponentielle de paramètre λ ; de plus, le fait que la première F^*-transition ait eu lieu, ou non, ne modifie pas la probabilité stationnaire du processus (indépendance relative). De plus, si on appelle σ l'instant de la première F^*-transition (σ est un "temps d'arrêt"), on a Proba $[\sigma < +\infty] = 1$ puisque $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{j\in F} x(t,j) = 0$. On peut donc parler de la loi du processus <u>juste après</u> la première F^*-transition ; or $\lim\limits_{t\to\infty} y(t,j) = q(j)$ donc cette loi est la même que la loi initiale.

On a donc, puisque la loi initiale est la même, exactement les mêmes conclusions quand on étudie le processus à partir de la première F^*-transition On en déduit, notamment, que la loi après la $2^{\text{ième}}$ - et donc après la $k^{\text{ième}}$ - F^*-transition est toujours la même que la loi initiale. A fortiori, cette loi est donc la loi stationnaire après une F^*-transition. Autrement dit, si on choisit une F^*-transition "au hasard", la loi après cette F^*-transition est la même que la loi stationnaire du processus. Si donc on étudie le délai entre deux F^*-transitions (la première étant choisie "au hasard"), ce délai suit la loi exponentielle de paramètre λ et est "relativement indépendant" (au sens indiqué plus haut) de l'état stationnaire considéré.

<u>Vérification</u>

Compte-tenu de E.10., le système (E.3., E.7.) a une et une seule solution. Il est évident que E.12. et E.13. satisfont aux conditions initiales E.4. et E.8. Il suffit donc de vérifier que (E.12., E.13.) satisfait aux équations (E.3., E.7.) Si on pose $x(t,j) := q(j)\, e^{-\lambda t}$, on a :

$$e^{\lambda t} \{ -[d(j) + b(j,j)]\, x(t,j) + \sum_{k\neq j} x(t,k)\, (a-b)\, (k,j) \}$$

$$= - [d(j) + b(j,j)]\, q(j) + \sum_{k\neq j} q(k)\, (a-b)\, (k,j)$$

soit, compte-tenu de A.5. :

$$= - \sum_{k\in E} q(k)\, b(k,j)$$

soit, compte-tenu de E.11. :

$$= - \lambda q(j)$$

ce qui prouve E.3.

Le système E.7. devient alors, compte-tenu de E.11. :

$$y'(t,j) = \lambda q(j)\, e^{-\lambda t}$$

ce qui implique E.13.

On aurait également pu démontrer ce théorème 3 à partir du théorème 2.

Exemple 1

L'exemple le plus classique pour lequel la condition E.11 est satisfaite est celui d'une file unique, avec une seule classe de clients, soumise à un flux d'entrée poissonnien. L'ensemble F (cf. A.6.) est l'ensemble des couples (j,k) tels que le passage de j à k correspond à une sortie de la station, sans feedback ($b(j,j) = 0$). Le flot de sortie est alors poissonnien de paramètre λ et ce flot est "relativement indépendant" de la probabilité stationnaire au sens indiqué plus haut.

De nombreuses généralisations ont été données (cf. [Bur] , [Kel], [Bre], etc...). Elles reposent toutes sur la relation E.11.

Exemple 2

Nous allons donner une autre façon d'utiliser le théorème 3 qui permet de mieux voir où intervient la propriété de "balance locale".

On considère un réseau de files d'attente avec une seule classe de clients. Soit S une station de ce réseau. L'ensemble F est l'ensemble des couples (j,k) d'états tels que le passage de j à k correspond à une entrée ("réelle ou fictive", cf. in fine) dans la station S.

On définit G comme en C.2. et c comme en C.3. (mais on ne suppose pas C.1.) ; le couple (j,k) d'état appartient à G si et seulement si le passage de j à k correspond à une sortie de la station S (sous réserve d'avoir choisi F suffisamment grand). Soit $\lambda > 0$. On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tout élément j de E :

E.14. $$q_j \sum_{k \in E} c(j,k) = \sum_{k \in E} q_k\, b(k,j)$$

E.15. $$\sum_{k \in E} c(j,k) = \lambda$$

L'ensemble de ces deux conditions E.14. et E.15. implique évidemment E.11. et donc E.12. et E.13.

La condition E.14. est la condition classique de "balance locale" (cf. [GeP], [BCMP]),etc... Notons qu'on peut avoir balance locale pour la station S mais pas pour d'autres stations.

La condition E.15. est une condition sur le taux de service de la station S.

1er cas

On suppose que S contient une infinité de clients et le flot de sortie est poissonnien et de paramètre λ ; s'il y a balance locale pour S, le flot d'entrée en S est lui aussi poissonnien de paramètre λ : c'est une autre façon de présenter l'exemple 1 ci-dessus.

2e cas

On peut aussi considérer le cas (nouveau semble-t-il) où S est une station avec un seul serveur donc le taux vaut λ quand la station n'est pas vide. Quand la station est vide, on introduit un "feedback fictif" de taux λ ; autrement dit, si E_0 est l'ensemble des états pour lesquels la station est vide, on pose, pour tout élément j de E_0 , $b(j,j) := c(j,j) := \lambda$.
S'il y a "balance locale" en S, la proposition qui précède montre que le flot d'entrée en S (réel ou fictif) est poissonnien et "relativement indépendant" de l'état stationnaire.

Si on ne tient plus compte du "feedback fictif", ce qui précède permet, par exemple, d'exprimer $(x_j)_{j\in E}$ en fonction de $(x_j)_{j\in E_0}$; or les équations de Labetoule, Pujolle et Soula (cf. [LPS]) qui permettent de calculer les transformées de Laplace des délais liés à des éléments de E_0 ne font pas intervenir les autres délais : on peut donc, éventuellement, les résoudre à part puis obtenir tous les $(x_j)_{j\in E}$.

On peut évidemment considérer les généralisations classiques liées à l'exemple 2 ; par exemple, on peut supposer qu'il y a plusieurs classes de clients. S'il y a balance locale pour une classe γ (resp. pour l'ensemble des classes) à la station S et si le taux de service pour la classe γ (resp. pour toutes les classes) est fixe, on peut appliquer le théorème 3.

Rappelons que, dans ce cas (taux de service fixe, c'est-à-dire un seul serveur), il y a égalité des lois des délais entre deux arrivées et des délais entre deux départs (cf. [Wal] et [Leb]) ; cette propriété est valable même s'il n'y a pas balance locale sous réserve d'avoir une propriété portant sur la loi "après une arrivée".

Annexe 1

On considère un processus d'arrivées qui évolue en régime stationnaire. Le délai entre deux arrivées successives est une variable aléatoire Y de densité de probabilité g. Ce délai est indépendant des états passés du processus. On choisit un instant "au hasard" ; soit X la variable aléatoire associée au délai avant la prochaine arrivée ; soit h la densité de probabilité de X :

On a alors :

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{g(u)du}{E(Y)}$$

Nous allons donner une justification "intuitive" de cette propriété. Pour une étude plus rigoureuse, cf. par exemple, [Nev].

Considérons N arrivées successives, avec N "très grand". Parmi ces arrivées, considérons celles correspondant à des délais de durée comprises entre u et u+h avec h "petit" ; le pourcentage de telles arrivées vaut h.g(u) (au premier ordre près). La "place" dans le temps occupée par les délais associées vaut donc u N h g(u) pour une "place" totale N E(Y) ; quand on choisit un instant "au hasard", la probabilité de tomber dans un intervalle entre deux arrivées associé à un délai comme ci-dessus (de durée comprise entre u et (u+h)) vaut donc

$$\frac{u\ Nh\ g(u)}{N\ E(Y)} = \frac{u\ h\ g(u)}{E(Y)} \quad .$$

Dans ce cas, la loi de X est la loi équi-distribuée sur [0,u] (si on néglige h). On a donc, en sommant sur h :

$$f(t)dt = \int_t^\infty \frac{dt}{u} \cdot \frac{u\ g(u)}{E(Y)}\ du$$

d'où la formule annoncée.

Annexe 2

On considère un réseau constitué de trois stations - S_1, S_2 et S_3 - entre lesquelles circule un client unique. Quand ce client quitte une station il va dans chacune des deux autres stations avec la probabilité 1/2. Le taux en S_1 vaut 2α, en S_2 et S_3 il vaut 2. Ce réseau est un réseau réversible. On pose, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$:

$x_i(t)$:= probabilité pour le client d'être dans la station i à l'instant t.

On considère des conditions initiales

$$x_i^o := x_i(0) \quad , \text{ pour } \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \quad ;$$

on pose $\quad \beta := -2\alpha x_1^o + x_2^o + x_3^o \quad ;$

on calcule

$$x_1(t) = \{1 - \beta e^{-(2\alpha+1)t}\} / (1+2\alpha)$$

$$x_2(t) = \{2\alpha + \beta e^{-(2\alpha+1)t} + (1+2\alpha)(x_2^o - x_3^o) e^{-3t}\} / (1+2\alpha)^2$$

$$x_3(t) = \{2\alpha + \beta e^{-(2\alpha+1)t} + (1+2\alpha)(x_3^o - x_2^o) e^{-3t}\} / 2(1+2\alpha)$$

et on peut vérifier les relations C.14.

L'intérêt d'un tel exemple est de constater que le système C.14. - de même que C.12. - est un système très "riche".

REFERENCES

[BCMP] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz and F.G. Palacios, *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers*, J.A.C.M. Vol 22, n°2, 248-260, 1975.

[Bre] J. Brémaud, *Point processes and queues*, Springer Verlag, 1981.

[Bur-1] P.J. Burke, *The output of a queuing system*, Operations research, n°4, 699-704, 1956.

[Bur-2] P.J. Burke, *Proof of a conjecture in the interarrival time distribution in a M/M/1 queue with feedback*, I.E.E.E. Transcommunications, 175-176, 1976.

[DiN] R. Disney and P. Mc Nickle, *The M/G/1 queue with instantaneous Bernouilli feedback*, Technical report 77-4 of the University of Michigan, Ann Arbor.

[Jac] J.R. Jackson, *Jobshop-like queue system*, Management Sci., Vol 10, 131-142, 1963.

[GeP] Gelenbe et Pujolle, *Introduction aux réseaux de files d'attente*, Eyrolles, 1982.

[Kel] F.P. Kelly, *Reversibility and stochastic networks*, J. Wiley, 1979.

[LPS] J. Labetoulle, G. Pujolle and C. Soula, *Stationary distributions of flows in Jackson networks*, Mathematics of operations research, Vol 6, n°2, May 1981.

[Leb] J.Y. Le Boudec, *Interentrées et intersorties dans un réseau à forme produit*, Rapport IRISA, novembre 1983.

[Len] Le Ny, *Etude analytique de réseaux de files d'attente multi-classes à routages variables*, RAIRO, Vol 14, N°4, 331-347, 1980.

[Nev] J. Neveu, *Processus ponctuels*, Lecture Notes n°598, Springer Verlag, 1977.

[Pel] J. Pellaumail, *Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 15, n°3, 261-286, 1979.

[Pit] B. Pittel, *Closed exponential networks of queues with blocking*, I.B.M. Research report, RC. 7174, 1983.

[Wal] J. Walrand, *Filtering formulas and the ./M/1 queue in a quasi reversible network*, preprint, 1983.

[Yos] Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1971.

PI 208 Problèmes d'implémentation du langage Prolog en vue de la réalisation d'une machine Prolog
Yves BEKKERS, Bernard CANET, Olivier RIDOUX, Lucien UNGARO
Octobre 1983, 63 pages.

PI 209 La technique du suivi de contour en synthèse d'images et ses applications
Gérard HEGRON, Octobre 1983.

PI 210 A new characterization of infinitary rational languages
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 9 pages.

PI 211 On the observational semantics of fair parallelism
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 40 pages.

PI 212 Solution à forme produit d'un système linéaire
J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 36 pages.

PI 213 Equations de Chapman-Kolmogorov et flots stationnaires pour des processus markoviens
J.Y. LE BOUDEC et J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 18 pages.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique